数理解析研究所講究録
第 1857 巻 2013 年 77-83

An equivalence between the duration problem and the best choice problem for the continuous arrival time model

愛知大学・経営学部　玉置　光司 (Mitsushi Tamaki)
Faculty of Business Administration, Aichi University

1 Introduction

良さに関して順位をつけることができる対象が n 個出現する。T_i を順位 i の対象の出現時刻とし、$T_1, T_2, \ldots, T_n$ が各々独立に時間区間 $(0,1)$ 上に一様に分布する確率変数であると仮定する。各対象は出現時にその相対順位（既に出現した対象の中での順位）が観測される。相対順位 1 の対象の duration を、この対象の出現時刻から次の相対順位 1 の対象が出現するまでの経過時間として定義する（次の相対順位 1 が出現しない場合は、最終時刻 1 までの経過時間として定義する）。Continuous (arrival) time duration problem は、上述のフレームワークの下で duration の期待値をできる限り大きくする相対順位 1 の選択を議論する問題である。Duration problem を最初に考えたのは Ferguson et al.(1992) であるが、そこでは n 個の対象が毎時 1 つずつランダムな順序で出現すると仮定した discrete (arrival) time duration problem であり、上述の continuous time duration problem は調べられていない。

2 節では t-rule の下での continuous time duration problem のパフォーマンスを調べる。t-rule とは、時刻 t まで待って、それ以降に出現する最初の相対順位 1 を選ぶというルールである。この問題は既に Hu et al.(1998) によって解かれているが、ここでは別の導出を与える。3 節では random truncation time V を考慮した continuous time duration problem を扱う。V は $T_1, T_2, \ldots, T_n$ とは独立な確率変数で、プロセスが時刻 V に打ち切られることを意味している。したがって、duration も時刻 V までの経過時間として定義される。特に興味深いのは V の密度が

$$f(v) = m(1-v)^{m-1}, \quad 0 < v < 1 \tag{1}$$

で与えられる場合である。m は正整数を取るパラメーターで $m = 1$ の場合は一様分布、$m = 2$ の場合は三角分布である。4 節では対応する continuous time best choice problem のパフォーマンスを調べる。Gnedin(2005) は discrete time duration problem with random truncation と discrete time best choice problem with random truncation の等価性を議論したが、それをもたらす具体的な random truncation の分布を与えていない。本稿では continuous time model において、（1）で与えられる分布（密度）が Gnedin の等価性を与えることを示す。Duration problem 一般に関しては Samuels(2004), Gnedin(2004), Mazalov and Tamaki(2006), Pearce et al.(2012), Tamaki(2013) を参照されたい。

2 Continuous time duration problem

最初に次の Lemma を与える。

Lemma 1. 順位をつけることができる対象が n 個あり、それらは各々独立に時間区間 $(0,a)$ 上に一様に出現する。すなわち、$T_i(a)$ を順位 i の出現時刻とすると、$T_1(a), T_2(a), \ldots, T_n(a)$ は $(0,a)$ 上の独立一様確率変数列である。このとき、最初の対象（比較の対象がないので、これは相対順位 1 と見なされる）を選んだとき、この対象の duration の期待値 $E_n(a)$ は $h_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$ と定義すると次式で与えられる。

$$E_n(a) = \frac{ah_n}{n+1} \tag{2}$$

証明 直感的に求めることもできるが、念のために証明を与える。最初の対象（これを A と呼ぶ）の出現時刻を X とすると、$X = \min\{T_1(a), T_2(a), \ldots, T_n(a)\}$ であるから、順序統計量の性質から X の密度関数 $f(x)$ は次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{n}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{n-1}, \quad 0 < x < a \tag{3}$$

また

$$E[X] = \int_0^a xf(x)dx = \frac{a}{n+1} \tag{4}$$

であることにも注意されたい。最初に $X = x$ という条件の下での A の duration の期待値 $E_n(a \mid x)$ を求めよう。これを求めるためにさらに A の絶対順序 R で条件付けする。$R = r$ の場合のこの値を $E_n(a \mid x, r)$ と書くと、

$$E_n(a \mid x, r) = \frac{a-x}{r}$$

となる。なぜならば、$R = r$ という条件の下では、残り時間区間 $a - x$ の間に A よりベターな対象がちょうど $r-1$ 個出現し、A の duration は最初のベターな対象の出現により終了するから、これは（4）より直ちに得られる。また、明らかに $P\{R = r\} = 1/n,\ 1 \le r \le n$ であるから

$$\begin{aligned} E_n(a \mid x) &= \sum_{r=1}^{n} E_n(a \mid x, r) P\{R = r\} \\ &= \frac{(a-x)h_n}{n} \end{aligned} \tag{5}$$

したがって、（3）、（5）より

$$\begin{aligned} E_n(a) &= \int_0^a E_n(a \mid x) f(x)dx \\ &= \frac{ah_n}{n+1} \end{aligned}$$

となり、（2）を得る。

1 節で述べた continuous time duration problem に戻る。対象が n 個のとき、t-rule の下での duration の期待値を $Q_n(t)$ とすると、次のように与えられる。

Theorem 1. $n \geq 2$ に対して以下が成立する。

$$\begin{array}{rrcl} (i) & Q_n(t) & = & t\sum_{k=2}^{n} \frac{h_{k-1}}{k}(1-t)^k + \frac{h_n}{n+1}(1-t)^{n+1} \\ (ii) & Q_n(t) & \geq & Q_{n+1}(t) \\ (iii) & Q_n(t) & \to & Q(t) = \frac{1}{2}t\log^2 t \end{array}$$

証明　t-rule の下での duration を $D(t)$ で表す。また、$R(t)$ を時刻 t までに出現する対象の中で最良のものの絶対順位とする（t までに出現しない場合は便宜的に $R(t) = n+1$ と約束する)。このとき、$Q_n(t)$ は $R(t)$ で条件付けることにより次のように表わされる。

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n} E\left[D(t) \mid R(t) = k+1\right] P\left\{R(t) = k+1\right\} \tag{6}$$

$R(t) = k+1$ ということは、上位 $(k+1)$ 個の対象の出現時刻 $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$ が $T_{k+1} < t < \min\{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ を満たすことと同値であるから、$k = 0, 1, \ldots, n-1$ のとき

$$P\left\{R(t) = k+1\right\} = t(1-t)^k \tag{7}$$

である。ただし、$R(t) = n+1$ は、全ての対象が時刻 t 以降に出現するので

$$P\left\{R(t) = n+1\right\} = (1-t)^n \tag{8}$$

である。他方、Lemma 1 より

$$E\left[D(t) \mid R(t) = k+1\right] = \frac{(1-t)h_k}{k+1} \tag{9}$$

である。何故ならば、$R(t) = k+1$ という条件の下では、 t-rule は上位 k 個の対象のうち最初に出現するものを選ぶ。また、これらの k 個は互いに独立に区間 $(t, 1)$ で一様に出現する。したがって、Lemma 1 が適用できる。（7）－（9）を（6）に代入して (i) を得る。

また、(i) より直ちに次を得る。

$$\begin{array}{rcl} Q_n(t) - Q_{n+1}(t) & = & \frac{(h_n - 1)(1-t)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \\ & \geq & 0 \end{array}$$

これは (ii) の成立を示している。(iii) は良く知られた次の恒等式より明らか。

$$\log^2(t) = 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h_{k-1}}{k}(1-t)^k$$

Theorem 1 の結果は強力である。$Q(t)$ は $t = e^{-2}$ で最大となり、$Q(e^{-2}) = 2e^{-2}$ である。したがって、出現対象数 $n(\geq 1)$ が未知であっても、e^{-2}-ルールを用いれば duration を $2e^{-2}$ 以上にできることを示している。

3 Duration problem with random truncation

2節のモデルに random truncation time V を導入する。V の密度関数が（1）で与えられる場合、t-rule の下での期待 duration を求めよう。この値を、（1）のパラメーター m を反映させて $Q_n^{(m)}(t)$ と表す。確率変数 $D(t), R(t)$ は Theorem 1 の証明で定義したものである。更に V の値で条件付けると（6）と同様に次の表現を得る。

$$Q_n^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \int_t^1 E\left[D(t) \mid R(t) = k+1, V = v\right] f(v)dv \right\} P\left\{R(t) = k+1\right\} \tag{10}$$

$v > t$ のとき、

$$E\left[D(t) \mid R(t) = k+1, V = v\right] = \sum_{j=1}^{k} \frac{(v-t)h_j}{j+1} \binom{k}{j} \left(\frac{v-t}{1-t}\right)^j \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k-j} \tag{11}$$

である。何故ならば、$R(t) = k+1, V = v$ という条件の下では、t 以降に出現する上位 k 個の対象の中で、時刻 v までに出現するものがちょうど j 個である確率は $\binom{k}{j}\left(\frac{v-t}{1-t}\right)^j \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k-j}$ で、この j 個の中で最初に出現するものを選んだときの期待 duration が Lemma 1 より $\frac{(v-t)h_j}{j+1}$ であることから（11）を得る。次の恒等式

$$\sum_{i=2}^{k+1} h_{i-1} \binom{k+1}{i} \left(x^{-1} - 1\right)^i = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \left(x^{-i} - 1\right) \left(x^{-(k+1-i)} - 1\right), \quad 0 < x < 1$$

を利用すると（11）は以下のように変形される（この恒等式は k に関する帰納法で示すことができる)。

$$\begin{aligned}
E\left[D(t) \mid R(t) = k+1, V = v\right] &= \left(\frac{1-t}{k+1}\right) \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k+1} \sum_{j=1}^{k} h_j \binom{k+1}{j+1} \left(\frac{v-t}{1-v}\right)^{j+1} \\
&= \left(\frac{1-t}{k+1}\right) \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k+1} \sum_{i=2}^{k+1} h_{i-1} \binom{k+1}{i} \left(\frac{1-t}{1-v} - 1\right)^i \\
&= \left(\frac{1-t}{k+1}\right) \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k+1} \\
&\quad \times \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \left[\left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{-i} - 1\right] \left[\left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{-(k+1-i)} - 1\right]
\end{aligned} \tag{12}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
&\int_t^1 E\left[D(t) \mid R(t) = k+1, V = v\right] f(v)dv \\
= \;& \frac{m(1-t)^m}{k+1} \int_t^1 \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k+m} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \left[\left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{-i} - 1\right] \left[\left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{-(k+1-i)} - 1\right] dv \\
= \;& \frac{m(1-t)^{m+1}}{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \int_0^1 x^{k+m} \left(x^{-i} - 1\right) \left(x^{-(k+1-i)} - 1\right) dx
\end{aligned} \tag{13}$$

（13）の積分は次のようになる。

$$\int_0^1 x^{k+m} \left(x^{-i} - 1\right) \left(x^{-(k+1-i)} - 1\right) dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left\{\left(x^{m-1} - x^{m-1+i}\right) - \left(x^{m+k-i} - x^{m+k}\right)\right\} dx \\
&= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+i}\right) - \left(\frac{1}{m+k+1-i} - \frac{1}{m+k+1}\right) \\
&= i\left[\frac{1}{m(m+i)} - \frac{1}{(m+k+1)(m+k+1-i)}\right] \qquad (14)
\end{aligned}
$$

（１４）を（１３）に戻して

$$
\begin{aligned}
&\int_t^1 E\left[D(t) \mid R(t) = k+1, V = v\right] f(v) dv \\
&= \frac{m(1-t)^{m+1}}{k+1} \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{1}{m(m+i)} - \frac{1}{(m+k+1)(m+k+1-i)}\right] \\
&= \frac{m(1-t)^{m+1}}{k+1} \left[\frac{1}{m} \sum_{j=m+1}^{m+k} \frac{1}{j} - \frac{1}{m+k+1} \sum_{j=m+1}^{m+k} \frac{1}{j}\right] \\
&= \frac{(1-t)^{m+1}(h_{m+k} - h_m)}{m+k+1} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

（7)、（8)、（１５）を（１０）に代入すると次の結果を得る。

Theorem 3. $m \geq 1$ に対して次が成り立つ。

$$
Q_n^{(m)}(t) = (1-t)^{m+1}\left[t \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{h_{m+k} - h_m}{m+k+1}\right)(1-t)^k + \left(\frac{h_{m+n} - h_m}{m+n+1}\right)(1-t)^n\right] \qquad (16)
$$

4 Best choice problem with random truncation

3節と同じ設定の下で best choice problem を考えよう。これは random truncation time V までに出現した対象の中のベストを選べば勝ち、そうでなければ負けという問題である。V の密度関数が（１）で与えられる場合、t-rule の下での勝つ確率を $P_n^{(m)}(t)$ と表す。インデケーター $W(t)$ を

$$
W(t) = \begin{cases} 1, & \text{t − rule の下で勝つ場合}, \\ 0, & \text{t − rule の下で負ける場合} \end{cases}
$$

と定義すると、（１０）と同様に次の表現を得る。

$$
P_n^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \left\{\int_t^1 E\left[W(t) \mid R(t) = k+1, V = v\right] f(v) dv\right\} P\left\{R(t) = k+1\right\} \qquad (17)
$$

$v > t$ のとき、

$$
E\left[W(t) \mid R(t) = k+1, V = v\right] = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \binom{k}{j} \left(\frac{v-t}{1-t}\right)^j \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k-j} \qquad (18)
$$

で与えられる。（１１）の導出で説明したように、t 以降に出現する上位 k 個の対象の中で、時刻 v までに出現するものがちょうど j 個である確率は $\binom{k}{j}\left(\frac{v-t}{1-t}\right)^j \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k-j}$ で、この j 個の中で最初

に出現するものが j 個の中の最良（ベスト）である確率が $1/j$ であることから（１８）を得る。次の恒等式を利用する（これも k に関する帰納法で容易に示される）。

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\binom{k}{j}\left(x^{-1}-1\right)^{j} = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\left(x^{-j}-1\right), \quad 0<x<1$$

これを用いると（１８）は次のように変形される。

$$\begin{aligned} E\left[W(t) \mid R(t)=k+1, V=v\right] &= \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\binom{k}{j}\left(\frac{v-t}{1-v}\right)^{j} \\ &= \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\binom{k}{j}\left(\frac{1-t}{1-v}-1\right)^{j} \\ &= \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\left[\left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{-j}-1\right] \qquad (19) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} &\int_t^1 E\left[W(t) \mid R(t)=k+1, V=v\right] f(v)dv \\ =\ & m(1-t)^{m-1}\int_t^1 \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k+m-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\left[\left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{-j}-1\right]dv \\ =\ & m(1-t)^{m}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\int_0^1\left(x^{k+m-1-j}-x^{k+m-1}\right)dx \\ =\ & m(1-t)^{m}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\left(\frac{1}{k+m-j}-\frac{1}{k+m}\right) \\ =\ & m(1-t)^{m}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(k+m-j)(k+m)} \\ =\ & \frac{m(1-t)^{m}(h_{m-1+k}-h_{m-1})}{m+k} \qquad (20) \end{aligned}$$

（7)、（8)、（２０）を（１７）に代入すると次の結果を得る。

Theorem 4. $m \geq 1$ に対して次が成り立つ。

$$P_n^{(m)}(t) = m(1-t)^m\left[t\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{h_{m-1+k}-h_{m-1}}{m+k}\right)(1-t)^k + \left(\frac{h_{m-1+n}-h_{m-1}}{m+n}\right)(1-t)^n\right]$$

Theorem 3 と 4 から次の興味深い関係が成立していることが分かる。

Theorem 5. $m \geq 1$ に対して次が成り立つ。

$$P_n^{(m+1)}(t) = (m+1)Q_n^{(m)}(t)$$

参考文献

[1] Ferguson, T. S., Hardwick, J. P. and Tamaki, M. (1992). Maximizing the duration of owning a relatively best object. In *Strategies for Sequential Search and Selection in Real Time*(Contemp. Math. 125), American Mathematical Society, Providence, RI, pp.37-57.

[2] Gnedin, A.V. (2004). Best choice from the planar Poisson process, *Stoch. Process. Appl.* **111**, 317-354.

[3] Gnedin, A.V. (2005). Objectives in the best-choice problems, *Sequential Analysis* **24**, 177-188.

[4] Hu, M., Tamaki, M, and Ohno, K. (1998). A continuous time duration problem with an unknown number of options, *Math. Japon.* **48**,233-237.

[5] Mazalov, V. V. and Tamaki, M. (2006). An explicit formula for the optimal gain in the full-information problem of owning a relatively best object, *J. Appl. Prob.* **43**, 87-101.

[6] Pearce, C. E., Szajowski, K. and Tamaki, M. (2012). Duration problem with multiple exchanges *NACO* **2**, 333-355.

[7] Samuels, S. M. (2004). Why do these quite different best-choice problems have the same solutions ? *Adv. Appl. Prob.* **36**,398-416.

[8] Tamaki, M. (2013). Optimal stopping rule for the no-information duration problem with random horizon, to appear in *Adv. Appl. Prob.* **45**.